Estatística e Análise de Dados em Zootecnia
Aulas Teóricas

Elsa Gonçalves
Secção de Matemática (DCEB)
Instituto Superior de Agronomia (ULisboa)

2025-26

Pressupostos

Admite-se que houve frequência duma disciplina introdutória de Estatística no primeiro ciclo (semelhante à existente no ISA) e que são conhecidos:

- principais indicadores descritivos (média, variância, covariância, coeficiente de correlação linear, etc.) e suas propriedades;
- conceitos básicos de probabilidades;
- variáveis aleatórias e sua caracterização;
- principais distribuições de probabilidades (Normal, t-Student, χ^2, F, etc.);
- conceitos de intervalos de confiança e testes de hipóteses.

Programa

A UC Estatística e Delineamento Experimental é uma disciplina de aprofundamento, que procura relacionar uma variável de interesse com outras variáveis.

O programa da UC consiste no estudo do principal modelo estatístico: o Modelo Linear, que inclui como casos particulares:

- Regressão Linear (Simples e Múltipla);
- Regressão Polinomial;
- Análise de Variância (ANOVA), de efeitos fixos e de efeitos aleatórios;
- Análise de Covariância (ANCOVA).

Delineamento Experimental

Modelo Linear

Elsa Gonçalves

(Adaptado,Cadima,J.(2021).O Modelo Linear. ISA, ULisboa)

Modelação de relações entre variáveis

Importância central da recolha de informação (dados).

Nas disciplinas introdutórias de Estatística aprende-se a trabalhar com dados relativos a uma variável.

Nesta disciplina: relações (modelos) entre duas ou mais variáveis.

Variáveis podem ser:

- numéricas (medições, rendimentos, contagens, etc.) ou categóricas (factores) (espécies, locais, tratamentos, etc.);
- foco de interesse (variável resposta) ou auxiliares para explicar uma variável resposta (variável preditora ou explicativa).

Modelos determinísticos e modelos estatísticos

Uma relação (modelo) entre duas ou mais variáveis pode ser:

- essencialmente exacta (como na Mecânica: $F = ma$).
  Trata-se de modelos determinísticos.

  Ou
- apenas uma tendência de fundo, sabendo-se que existe variabilidade das observações em torno dessa tendência de fundo. Trata-se de modelos estatísticos ou probabilísticos.

Modelação Estatística

Objectivo (informal): Descrever a relação de fundo entre

- uma variável resposta (ou dependente) y; e
- uma ou mais variáveis preditoras (variáveis explicativas ou independentes), $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Informação: A identificação da relação de fundo é feita com base em n observações do conjunto de variáveis envolvidas na relação.

Vamos inicialmente considerar o contexto de um único preditor numérico, para modelar uma única variável resposta numérica.

Motivamos a discussão com dois exemplos.

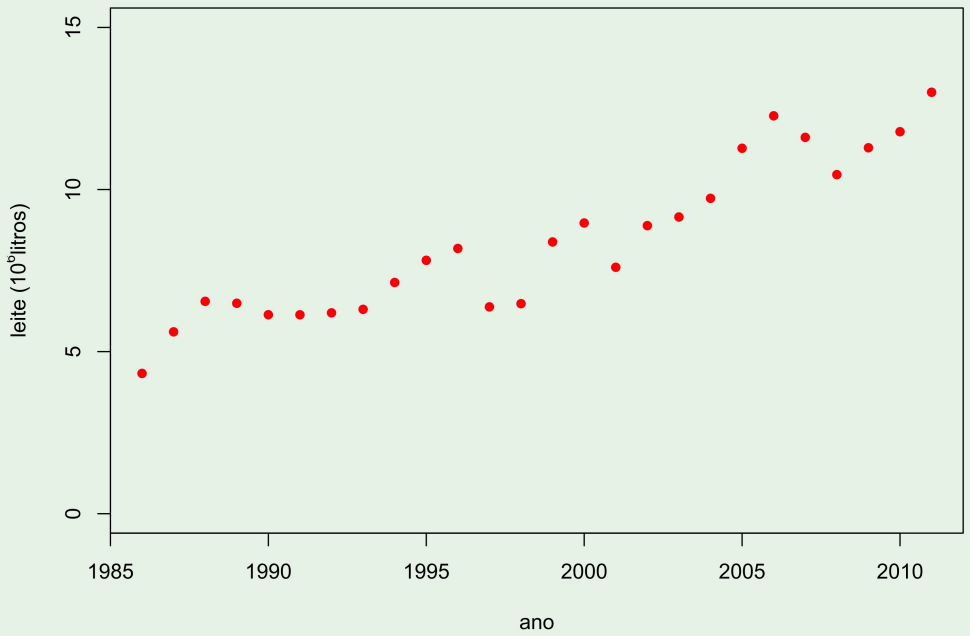
O Modelo Linear

- O Modelo Linear é um caso particular de modelação estatística;
- engloba um grande número de modelos específicos:
  Regressão Linear (Simples e Múltipla) , Regressão Polinomial, Análise de Variância, Análise de Covariância;
- é o mais completo e bem estudado tipo de modelo;
- serve de base para numerosas extensões
  (Regressão não linear, Modelos Lineares Generalizados, Modelos Lineares Mistos, etc.).

Exemplo 1

Produção de leite de cabra em Portugal, 1986 a 2011 (INE)

Produção (y) *vs.* Anos (x), $n = 26$ pares de valores, $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{26}$.



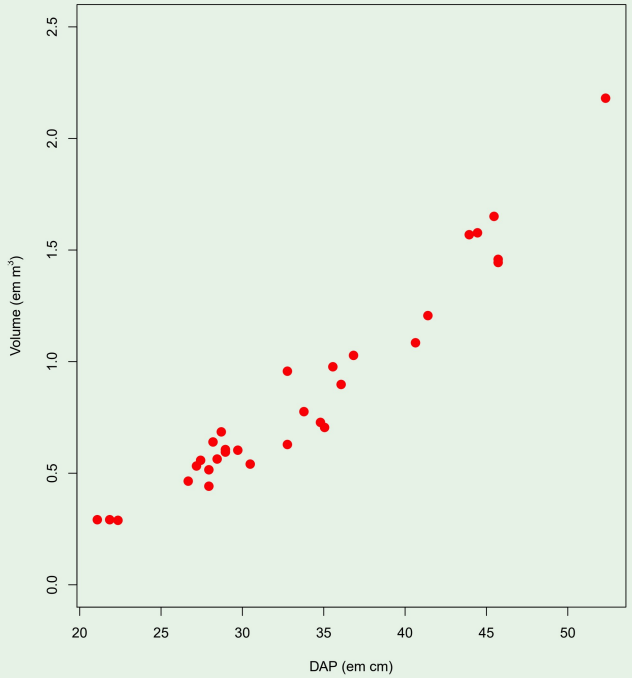
Existe uma tendência de fundo e é aproximadamente linear.
O coeficiente de correlação linear é $r_{xy} = 0.9348$.

Qual a "melhor" equação de recta, $y = b_0 + b_1 x$, para descrever as n observações (e que critério de "melhor")?

Exemplo 2 - relação linear

Volume de tronco *vs.* DAP em cerejeiras

DAP (Diâmetro à altura do peito, variável x) e Volume de troncos (y) de cerejeiras. Existem $n = 31$ pares de medições: $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{31}$.



A tendência de fundo é aproximadamente linear. O coeficiente de correlação linear é $r_{xy} = 0.9671$. Mas os $n = 31$ pares de observações são apenas uma amostra aleatória duma população mais vasta. Interessa o contexto inferencial: o que se pode dizer sobre a recta populacional $y = \beta_0 + \beta_1 x$?

Regressão Linear - Abordagem Descritiva

Regressão Linear Simples - contexto descritivo

Revisão: Estudado nas disciplinas introdutórias de Estatística.

Se n pares de observações $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{n}$ têm relação linear de fundo, a recta de regressão de y sobre x define-se como:

Recta de Regressão Linear de y sobre x

$$y = b_0 + b_1 x$$

com

$$\begin{aligned} \text{Declive} \quad b_1 &= \frac{cov_{xy}}{s_x^2} \\ \text{Ordenada na origem} \quad b_0 &= \overline{y} - b_1 \overline{x} \end{aligned}$$

sendo

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \qquad s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \qquad cov_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})\,.$$

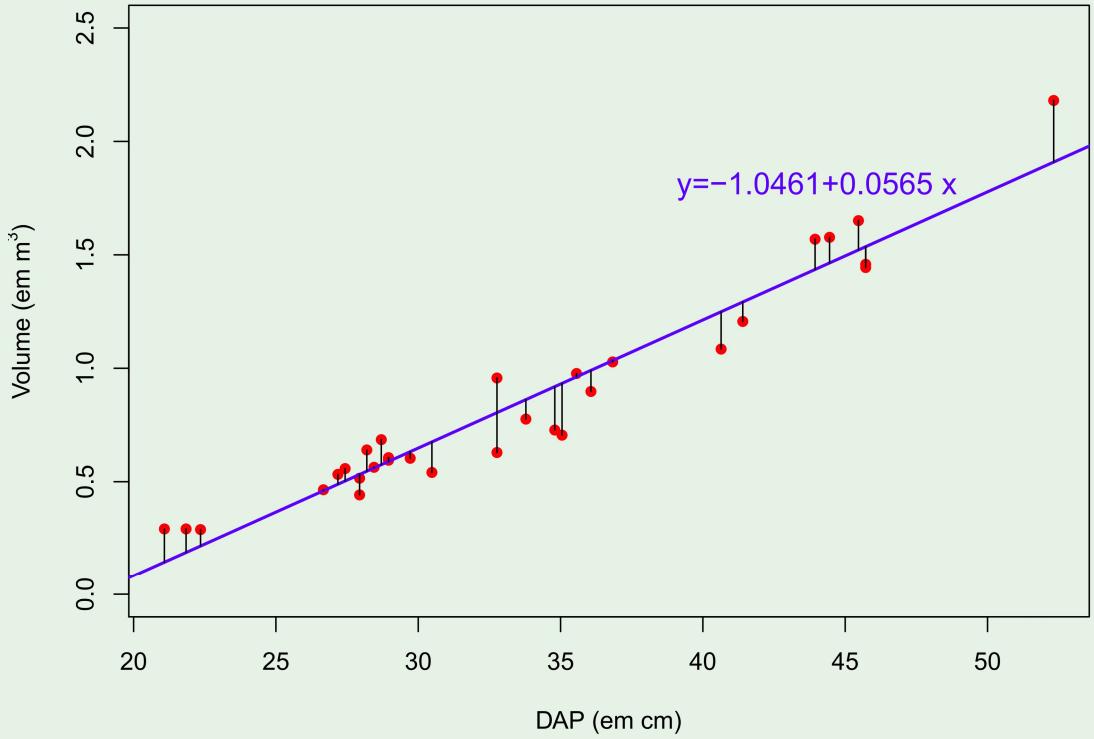
Regressão Linear Simples - contexto descritivo

Exemplo das cerejeiras

$n = 31$ pares de medições, $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{31}$.
DAP (x) e Volume de troncos (y) de cerejeiras.

$$
\begin{aligned}
cov_{xy} &= 3.5881929 \\
s_x^2 &= 63.5348018 \\
\overline{x} &= 33.6509032 \\
\overline{y} &= 0.8543468
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_1 = \frac{cov_{xy}}{s_x^2} &= 0.056476 \\
b_0 = \overline{y} - b_1 \overline{x} &= -1.046122
\end{aligned}
$$



Como se chegou à equação da recta?

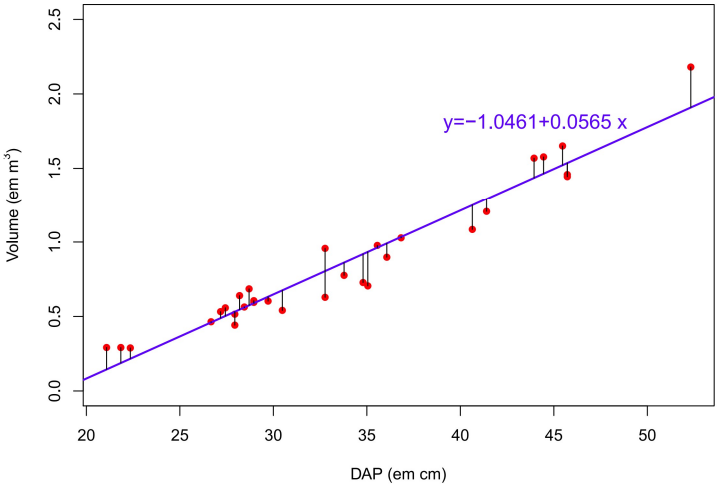
Valores ajustados e Resíduos

Dada uma recta, valores de y podem ser previstos a partir de valores de x, obtendo-se os "valores de y ajustados pela recta", $\hat{y}_i$:

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i \ .$$

Os resíduos são as diferenças entre os valores de y observados e ajustados ou seja, são as diferenças na vertical entre pontos e recta ajustada:

$$e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (b_0 + b_1 x_i) \ ,$$



O Critério de Mínimos Quadrados

Critério: minimizar a Soma de Quadrados dos Resíduos

$$SQRE = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (b_0 + b_1 x_i)]^2 \ .$$

Determinar b_0 e b_1 que minimizam $SQRE$ é um problema de minimizar uma função ($SQRE$) de duas variáveis (aqui chamadas b_0 e b_1).

Regressão Linear Simples - contexto descritivo

O critério de minimizar Soma de Quadrados dos Resíduos tem, subjacente, um pressuposto:

O papel das 2 variáveis, *x* e *y*, não é simétrico.

y – **variável resposta** (“dependente”)

- variável que se deseja modelar, prever a partir da variável *x*.

x – **variável preditora** (“independente”)

- variável com base na qual se pretende tirar conclusões sobre *y*.

Regressão Linear Simples - contexto descritivo

O i-ésimo resíduo é o desvio (com sinal) da observação y_i face à sua previsão a partir da recta:

$$e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (b_0 + b_1 x_i)$$

Interpretação do Critério de Mínimos Quadrados

Minimizar a soma de quadrados dos resíduos corresponde a minimizar a soma de quadrados dos "erros de previsão".

O critério tem subjacente a preocupação de prever o melhor possível a variável y, a partir da sua relação com o preditor x.

Revisão: Propriedades dos parâmetros da recta

Propriedades dos parâmetros da recta de regressão

- A ordenada na origem b_0:
  - é o valor de y (na recta) associado a $x = 0$;
  - tem unidades de medida iguais às de y.
- O declive b_1:
  - é a variação (média) de y associada a um aumento de uma unidade em x;
  - tem unidades de medida iguais a $\frac{unidades\ de\ y}{unidades\ de\ x}$.

Exemplo das cerejeiras

$$b_1 = 0.05648\,\frac{m^3}{cm}$$

por cada cm a mais no DAP, o volume do tronco aumenta, em média, $0.05648\,m^3$.

Revisão: Propriedades da recta de regressão

Propriedades da recta de regressão

- A recta de regressão passa sempre no centro de gravidade da nuvem de pontos, isto é, no ponto $(\overline{x}, \overline{y})$, como é evidente a partir da fórmula para a ordenada na origem:

$$b_0 = \overline{y} - b_1 \overline{x} \qquad \Leftrightarrow \qquad \overline{y} = b_0 + b_1 \overline{x} \ .$$

- $\overline{y}$ é simultaneamente a média dos y_i observados e dos $\hat{y}_i$ ajustados.

- Embora não tenha sido explicitamente exigido, a média dos resíduos e_i é nula, ou seja, $\overline{e} = 0$.

Revisão: RLS - As três Somas de Quadrados

Recordar: $s_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2$ a variância amostral das observações y_i.

Soma de Quadrados Total (SQT)

SQ Total $\quad SQT = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2 \quad = \quad (n-1)\, s_y^2$

Tem-se: $s_{\hat{y}}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \overline{y})^2$ a variância amostral dos $\hat{y}_i$ ajustados.

Soma de Quadrados da Regressão (SQR)

SQ Regressão $\quad SQR = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \overline{y})^2 \quad = \quad (n-1)\, s_{\hat{y}}^2$

Soma de Quadrados Residual (SQRE) - já dado

SQ Residual $\quad SQRE = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 \; = \; \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad = \quad (n-1)\, s_e^2$

Revisão: RLS - Fórmula fundamental e R^2

Fórmula Fundamental da Regressão

Prova-se a seguinte Fórmula Fundamental (ver Exercício RLS 5):

$$SQT = SQR + SQRE \quad \Leftrightarrow \quad s_y^2 = s_{\hat{y}}^2 + s_e^2$$

Definição: Coeficiente de Determinação

$$R^2 = \frac{SQR}{SQT} = \frac{s_{\hat{y}}^2}{s_y^2}, \qquad (s_y^2 \neq 0)$$

R^2 mede a proporção da variabilidade total da variável resposta Y que é explicada pela regressão. Quanto maior, melhor.

Propriedades do Coeficiente de Determinação

Propriedades de $R^2 = \frac{SQR}{SQT}$

- $0 \leq R^2 \leq 1$ (Todas as SQs são não negativas e $SQT = SQR + SQRE$)
- $R^2 = 1$ se, e só se, os n pontos são colineares. ("ideal")

  ($SQT = SQR \Leftrightarrow SQRE = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = 0 \Rightarrow e_i = 0$, para todo o i.

  Logo, todos os resíduos são nulos: os pontos estão todos em cima da recta.)
- $R^2 = 0$ se, e só se, a recta de regressão for horizontal. ("inútil")

  ($SQR = 0 \Leftrightarrow SQRE = SQT$. Toda a variabilidade de y é residual.

  $SQR = 0$ implica $\hat{y}_i = \overline{y}$, para todo o i. A recta é $y = \overline{y} \Leftrightarrow b_1 = 0$)
- Numa regressão linear simples, R^2 é o quadrado do coeficiente de correlação linear entre x e y:

$$R^2 = r_{xy}^2 = \left(\frac{cov_{xy}}{s_x\, s_y}\right)^2 \qquad \text{se } s_x \neq 0 \text{ e } s_y \neq 0$$

Algumas ideias prévias sobre modelação

- Todos os modelos são apenas aproximações da realidade.
- Pode haver mais do que um modelo adequado a uma relação. Um dado modelo pode ser melhor num aspecto, mas pior noutro.
- O princípio da parcimónia na modelação: de entre os modelos considerados adequados, é preferível o mais simples.
- Os modelos estatísticos apenas descrevem tendência de fundo: há variação das observações em torno da tendência de fundo.
- Num modelo estatístico não há necessariamente uma relação de causa e efeito entre variável resposta e preditores. Há apenas associação. A eventual existência de uma relação de causa e efeito só pode ser justificada por argumentos extra-estatísticos.

Transformações linearizantes

Nalguns casos, a relação de fundo entre *x* e *y* é não-linear, mas pode ser linearizada caso se proceda a transformações numa ou em ambas as variáveis.

Tais transformações podem permitir utilizar a Regressão Linear Simples, apesar de a relação original ser não-linear.

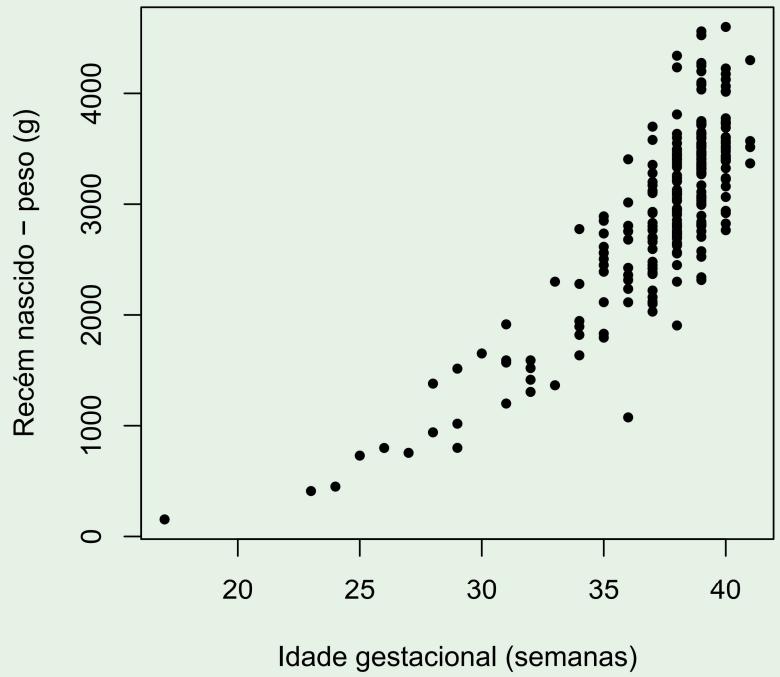
Vamos ver alguns exemplos particularmente frequentes de relações não-lineares que são linearizáveis através de transformações da variável resposta e, nalguns casos, também do preditor.

Exemplo 3 - Uma relação não linear

Peso de bebés à nascença

$n = 251$ pares de observações

Idade gestacional (x) e peso de bebé à nascença y, $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{251}$.



A tendência de fundo é não-linear: $y = f(x)$.

Exemplo 3 (cont.)

Neste caso, há uma questão adicional:

- Qual a forma da relação (qual a natureza da função f)?
  - f exponencial ($y = c\,e^{dx}$)?
  - f função potência ($y = c\,x^{d}$)?
  - outra?

Além das perguntas análogas ao caso linear:

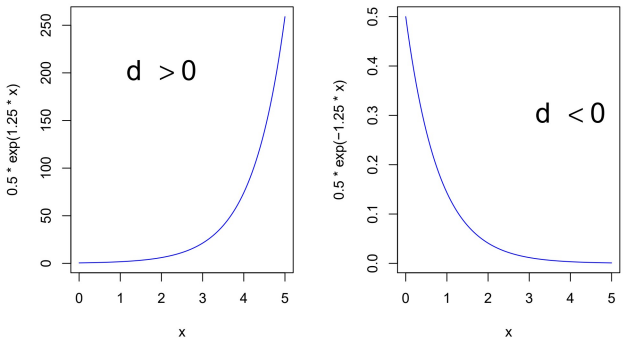
- Como determinar os "melhores" parâmetros c e d?
- E, se os dados forem amostra aleatória, o que se pode dizer sobre os respectivos parâmetros populacionais?

A Regressão Não Linear não faz parte do programa da disciplina. Mas transformações linearizantes de uma ou ambas as variáveis podem criar uma relação linear, que permita usar o Modelo Linear.

Relação exponencial

Relação exponencial : $y = c\,e^{d\,x}$

$(y>0 \quad ; \quad c>0)$



Transformação : Logaritmizando, obtém-se:

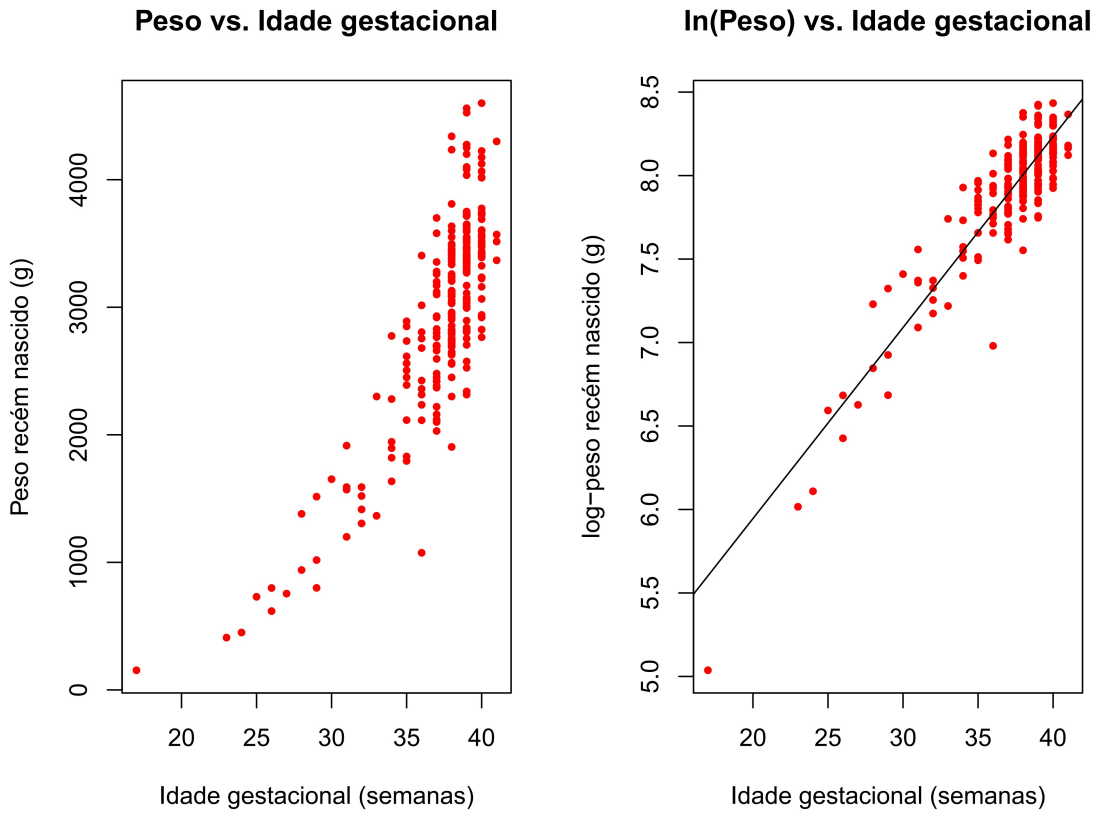
$$\begin{aligned} \ln(y) &= \ln(c) + d\,x \\ \Leftrightarrow \quad y^* &= b_0 + b_1\,x \end{aligned}$$

que é uma relação linear entre $y^* = \ln(Y)$ e x, com declive $b_1 = d$ e ordenada na origem $b_0 = \ln(c)$.

O sinal do declive da recta indica se a relação exponencial original é crescente ($b_1 > 0$) ou decrescente ($b_1 < 0$).

Uma linearização no Exemplo 3

O gráfico de log-pesos dos recém-nascidos contra idade gestacional produz uma relação de fundo linear:



Esta linearização da relação significa que a relação original (peso vs. idade gestacional) pode ser considerada exponencial.

Ainda a relação exponencial

Uma relação exponencial resulta de admitir que y é função de x e que a taxa de variação de y, ou seja, a derivada $y'(x)$, é proporcional a y:

$$y'(x) = d \cdot y(x) \ ,$$

isto é, que a taxa de variação relativa de y é constante:

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = d \ .$$

Primitivando (em ordem a x), tem-se:

$$\ln(y(x)) = \underbrace{d}_{=b_1} x + \underbrace{C}_{=b_0} \qquad \Leftrightarrow \qquad y(x) = \mathrm{e}^{C}\,\mathrm{e}^{d\,x}.$$

Repare-se que o declive b_1 da recta é o valor (constante) d da taxa de variação relativa de y. A constante de primitivação C é a ordenada na origem da recta: $C = b_0$.

Modelo exponencial de crescimento populacional

Um modelo exponencial é frequentemente usado para descrever o crescimento de populações, numa fase inicial onde não se faz ainda sentir a escassez de recursos limitantes.

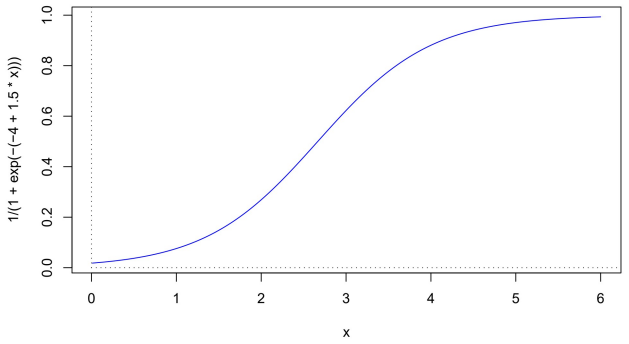
Mas nenhum crescimento populacional exponencial é sustentável a longo prazo.

Em 1838 Verhulst propôs uma modelo de crescimento populacional alternativo, prevendo os efeitos resultantes da escassez de recursos: o modelo logístico.

Considera-se aqui uma versão simplificada (com 2 parâmetros) desse modelo. Pode pensar-se que a variável *y* mede a dimensão duma população, relativa a um máximo possível, sendo assim uma proporção.

Relação Logística (com 2 parâmetros)

Relação Logística : $y = \frac{1}{1+e^{-(c+dx)}}$



$(b_1 > 0)$

Transformação : Como $y \in]0,1[$, tem-se uma relação linear entre a transformação *logit* de Y, i.e., $y^* = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$, e x:

$$\Rightarrow \quad 1-y = \frac{e^{-(c+dx)}}{1+e^{-(c+dx)}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{1-y} = \frac{1}{e^{-(c+dx)}} = e^{c+dx}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\ln\left(\frac{y}{1-y}\right)}_{=y^*} = \underbrace{c}_{=b_0} + \underbrace{d}_{=b_1} x$$

Ainda a Logística

A relação logística resulta de admitir que y é função de x e que a taxa de variação relativa de y diminui com o aumento de y:

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = d \cdot [1 - y(x)] \ .$$

De facto, a expressão anterior equivale a:

$$\frac{y'(x)}{y(x) \cdot (1 - y(x))} = d \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'(x)}{1 - y(x)} + \frac{y'(x)}{y(x)} = d$$

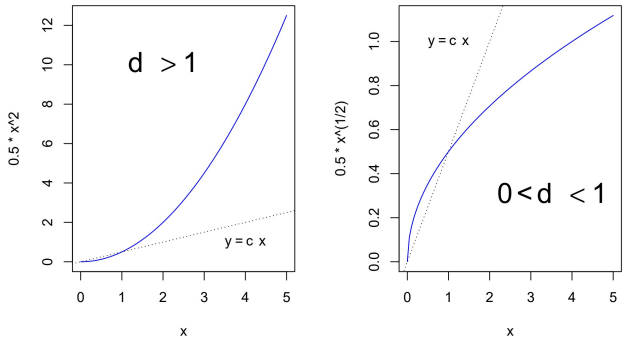
Primitivando (em ordem a x), tem-se:

$$\begin{aligned} -\ln(1 - y(x)) + \ln y(x) &= d\,x + C \\ \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{y}{1-y}\right) &= b_1\,x + b_0 \ . \end{aligned}$$

Relação potência ou alométrica

Relação potência : $y = c\,x^d$

$(x, y > 0 \quad ; \quad c, d > 0)$



Transformação : Logaritmizando, obtém-se:

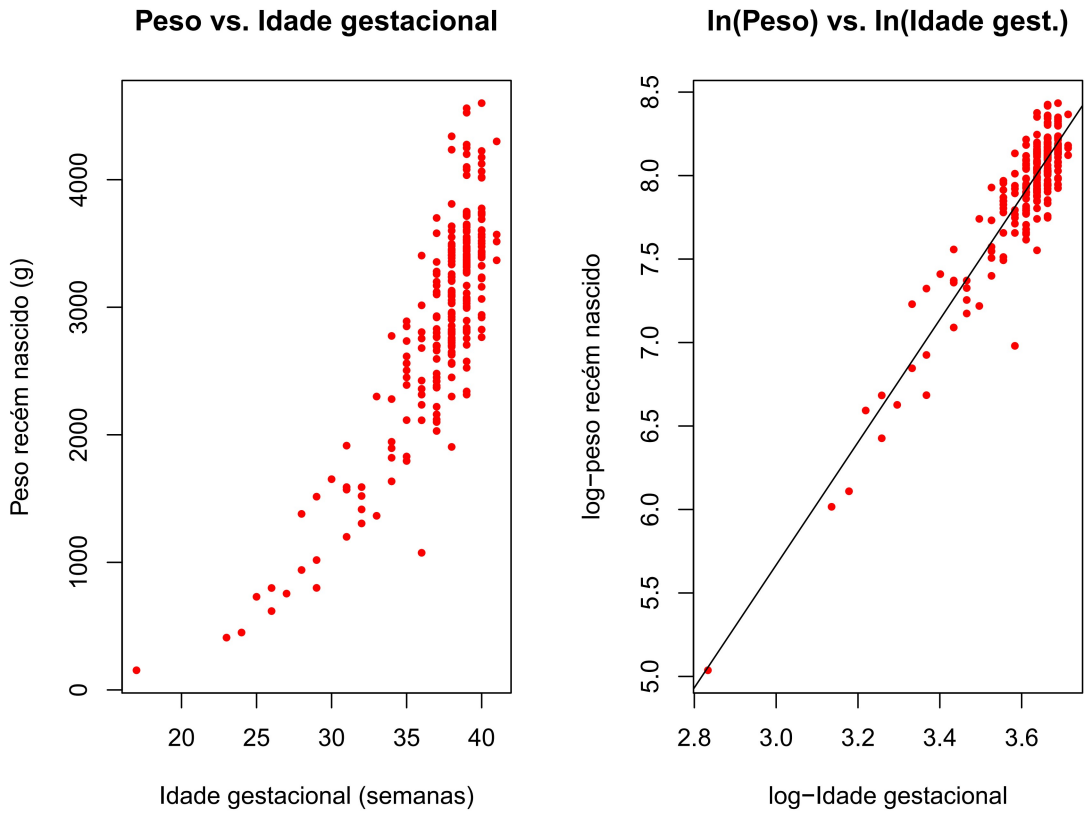
$$\begin{aligned} \ln(y) &= \ln(c) + d\ln(x) \\ \Leftrightarrow \quad y^* &= b_0 + b_1 x^* \end{aligned}$$

que é uma relação linear entre $y^* = \ln(y)$ e $x^* = \ln(x)$.

O declive b_1 da recta é o expoente d na relação potência original.
Mas $b_0 = \ln(c)$.

Outra linearização no Exemplo 3

O gráfico de log-pesos dos recém-nascidos contra log-idade gestacional produz outra relação de fundo linear:



Esta linearização significa que a relação original (peso vs. idade gestacional) também pode ser considerada uma relação potência.

Ainda a relação potência

Uma relação potência resulta de admitir que y e x são funções duma terceira variável t e que a taxa de variação relativa de y é proporcional à taxa de variação relativa de x:

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = d \cdot \frac{x'(t)}{x(t)} \ .$$

De facto, primitivando (em ordem a t), tem-se:

$$\ln y \ = \ d \ln x + C$$

e exponenciando,

$$y \ = \ x^d \cdot \underbrace{\mathrm{e}^C}_{=c}$$

A relação potência é muito usado em estudos de alometria, que comparam o crescimento de partes diferentes dum organismo.
A isometria corresponde ao valor $d = 1$.

Advertência sobre transformações linearizantes

A regressão linear simples não modela directamente relações não lineares entre x e y. Pode modelar uma relação linear entre as variáveis transformadas.

Transformações da variável-resposta y têm um impacto grande no ajustamento: a escala dos resíduos é alterada.

Nota: Linearizar, obter os parâmetros b_0 e b_1 da recta e depois desfazer a transformação linearizante não produz os mesmos parâmetros ajustados que resultariam de minimizar a soma de quadrados dos resíduos directamente na relação não linear. Esta última abordagem corresponde a efectuar uma regressão não linear, metodologia não englobada nesta disciplina.